E.N.S. SAINT-CLOUD FONTENAY

OPTION MATH MATH.APPLI.

Durée : 3 heures

Introduction et Notations

On se propose dans ce problème de calculer des zéros d'une fonction de variable complexe. Dans la première partie du problème, on introduit un outil qui permettra de localiser les zéros de la fonction; dans la deuxième partie, on localise effectivement ceux-ci; dans la troisième partie, on introduit une méthode plus fine, qui permettra de calculer des zéros avec une grande précision, à condition de savoir à peu près où ils se trouvent.

Les correcteurs attacheront la plus grande importance à la clarté et à la rigueur des démonstrations et des raisonnements. Ils sauront apprécier un schéma clair et pertinent, surtout s'il permet d'éviter un long discours.

L'usage d'une calculatrice électronique doit être accompagné de la liste des informations suivantes :

Marque et type de la machine, nombre de décimales disponibles, liste des fonctions disponibles, nombre de mémoires, (données et/ou programme), langages présents dans la machine.

On considère dans ce qui suit des fonctions définies sur $\mathbb{C}$ ou une partie de $\mathbb{C}$; on identifiera, si nécessaire $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. On note $|z|$ le module d'un nombre complexe z, qui est aussi la norme euclidienne de z en tant que vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Le disque unité de $\mathbb{C}$ est noté :

$$D^1 = \{ z \in \mathbb{C} / |z| \leqslant 1 \}.$$

Le cercle unité de $\mathbb{C}$ est noté :

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \}.$$

Le cercle unité S^1 est muni de la distance induite par le module :

$$\delta(z, z') = |z - z'|.$$

Un rectangle ABCD est défini par la donnée d'un sommet A, d'affixe z_A, d'un deuxième sommet B distinct du premier, et d'affixe z_B ; alors, on doit avoir D ≠ A, tel que :

$$\mathrm{Re}\,((z_D - z_A)(\bar{z}_B - \bar{z}_A)) = 0,$$

ce qui exprime que le côté AD est perpendiculaire au côté AB; de plus, le quatrième sommet C, d'affixe z_C, est déterminé par la relation :

$$z_C = z_D + z_B - z_A.$$

On dira que z est un élément du rectangle fermé de sommets A, B, C, D s'il existe des nombres s et t dans l'intervalle [0,1] tels que :

$$z = z_A + s(z_B - z_A) + t(z_D - z_A).$$

I

Soit α une application de S^1, muni de la distance δ, dans lui-même; on admet le résultat suivant : si α est continue, alors il existe une application continue β, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

(I.1.) $$\alpha(\exp(2\pi i\theta)) = \exp(2\pi i\beta(\theta)), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

On dira que β est un relèvement de α.

1° Connaissant un relèvement de α, calculer tous les relèvements de α.

2° La quantité :

$$\beta(\theta + 1) - \beta(\theta)$$

dépend-elle de θ ? du relèvement choisi ?

On posera

(I.2) $$d(\alpha) = \beta(1) - \beta(0).$$

3° Calculer $d(\alpha)$ quand :

$$\alpha(z) = \omega z^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad |\omega| = 1.$$

Tournez la page S. V. P.

page 42 1986 ENS Saint-Cloud-Fontenay Option Mathématiques.Mathématiques appliquées

4° Soient α_1 et α_2 deux applications continues de S^1 dans lui-même; calculer $d(\alpha_2 \circ \alpha_1)$ en fonction de $d(\alpha_2)$ et de $d(\alpha_1)$.

5° Soit α_1 une bijection bicontinue de S^1 sur lui-même, dont l'inverse est noté α_2. Que peut valoir $d(\alpha_1)$? Caractériser complètement les applications β qui peuvent être le relèvement d'un tel α_1.

6° Donner un exemple de fonction α continue de S^1 dans lui-même, telle que :

$$|\alpha(z) - 1| \leqslant \varepsilon \text{ sauf sur un arc de longueur } \varepsilon ;$$
$$d(\alpha) \neq 0.$$

On prendra pour fixer les idées $\varepsilon \leqslant 0{,}1$; on dessinera le graphe d'un relèvement de α.

7° Soient deux applications continues α_1 et α_2 de S^1 dans lui-même.

Montrer que s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$|\alpha_1(z) - \alpha_2(z)| \leqslant 2 - \varepsilon, \quad \forall z \in S^1,$$

alors

$$d(\alpha_1) = d(\alpha_2).$$

8° Soit α une application de S^1 dans lui-même qui est la limite uniforme d'une suite α_n de bijections bicontinues de S^1 sur lui-même :

$$\lim_{n \to \infty} \max_{z \in S^1} |\alpha_n(z) - \alpha(z)| = 0.$$

Que peut valoir $d(\alpha)$?

II

Soit g une application de D^1 dans C, qu'on suppose continue; si on suppose que g ne s'annule pas au bord de D^1 (le bord de D^1 est bien entendu S^1), on définit une application α_g de S^1 dans lui-même par :

$$\alpha_g(z) = \frac{g(z)}{|g(z)|}, \quad z \in S^1.$$

On définit alors :

$$d(g, S^1) = d(\alpha_g).$$

On admet le théorème (Brouwer). Si $d(g, S^1) \neq 0$, alors il existe un z dans D^1 tel que $g(z) = 0$.

1° Soit $\mathcal{R}$ un rectangle quelconque de C ; montrer qu'il existe une bijection bicontinue entre $\mathcal{R}$ et D^1.

2° Soit f une application continue de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui ne s'annule pas sur $\partial\mathcal{R}$, le bord de $\mathcal{R}$. En s'aidant du II.1° et des résultats de la partie I définir une quantité $d(f, \partial\mathcal{R})$ telle que, si $d(f, \partial\mathcal{R}) \neq 0$, alors f s'annule en un point au moins de $\mathcal{R}$.

3° On définit une fonction f de C dans lui-même par :

$$f(z) = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}.$$

Donner un disque centré à l'origine, tel que f ne s'annule en aucun point de ce disque autre que 0. Ce disque est noté Δ. Que vaut $d(f, \partial\Delta)$?

4° On cherche un zéro de f dans le demi-plan $\mathrm{Im}\, z > 0$. Soit $\mathcal{R}_1$ le rectangle de sommets :

$$A : z_A = a + 2i\pi,$$
$$B : z_B = a + 4i\pi,$$
$$C : z_C = b + 4i\pi,$$
$$D : z_D = b + 2i\pi.$$

Montrer que par un choix convenable de a positif et de b négatif, on peut réaliser :

$$\mathrm{Re}\, f(z) > 0 \text{ sur les côtés BC, CD, et DA de } \mathcal{R}_1.$$

5° On définit une application h de $\partial\mathcal{R}_1$ dans S^1 par :

$$h(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } z \in BC \cup CD \cup DA \\ \exp(z - a) \text{ si } z \in AB. \end{cases}$$

Tournez la page S. V. P.

ENS Saint-Cloud—Fontenay
Option Mathématiques. Mathématiques appliquées
1986
page 43

Si φ est une bijection bicontinue de S^1 sur $\partial\mathcal{R}_1$, on pose :

$$\alpha = h \circ \varphi .$$

Calculer $d(\alpha)$.

6° Montrer que pour un choix de a convenable,

$$d(\alpha) = d(f, \partial\mathcal{R}_1) .$$

On justifiera soigneusement les majorations et minorations utilisées, et on se référera explicitement, le cas échéant, aux résultats démontrés dans la partie I, pour justifier le raisonnement.

7° Pouvez-vous trouver d'autres rectangles $\mathcal{R}_k$, disjoints de $\mathcal{R}_1$, tels que $d(f, \mathcal{R}_k) \neq 0$? Que pouvez-vous dire de l'ensemble des zéros de f ?

III

Dans cette partie, on se propose de calculer précisément les zéros de f, qui ont été approximativement localisés, dans la partie II.

On dira qu'une fonction g d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si la limite :

$$\lim \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0)$$

existe quand z tend vers z_0. Une fonction est continûment $\mathbb{C}$-dérivable dans U, si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U, et si sa dérivée $g'(z)$ est continue par rapport à z.

On vérifie immédiatement les règles de dérivation de sommes, de produits, et d'inverse; si g est continûment $\mathbb{C}$-dérivable dans un voisinage du segment qui joint z_1 et z_2, on a la formule :

$$g(z_2) - g(z_1) = \int_0^1 g'(z_1 + t(z_2 - z_1))(z_2 - z_1)\, dt .$$

On n'utilisera aucune autre propriété des fonctions continûment $\mathbb{C}$-dérivables dans ce qui suit.

1° Soit g une fonction deux fois continûment $\mathbb{C}$-dérivable d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On pose, lorsque ces quantités sont finies :

$$a = \left|\frac{1}{g'(z_0)}\right|, \quad b = \left|\frac{g(z_0)}{g'(z_0)}\right|, \quad c = \max_{|z - z_0| \leq 2b} |g''(z)| .$$

Montrer que si toute la boule B fermée de centre z_0 et de rayon $2b$ est incluse dans U, et si le produit abc est suffisamment petit, alors la fonction :

$$h(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)}$$

est définie sur tout B.

2° Montrer que si abc est suffisamment petit, la restriction de h à B est contractante et on a $h(B) \subset B$.

3° Donner une condition suffisante pour que la suite :

$$z^0 = z_0 ; \; z^{n+1} = h(z^n)$$

converge. Que vérifie la limite de cette suite, si elle existe ?

4° Calculer avec la plus grande précision possible un zéro de la fonction f définie en II.3° et situé dans $\mathcal{R}_1$. On peut choisir comme point de départ de la récurrence, le point $z_0 = 4 + 8{,}5\,i$. On donnera la valeur de z^n calculée à chaque étape de la récurrence.

5° Pouvez-vous calculer d'autres zéros de f ?

page 44 1986 ENS Saint-Cloud-Fontenay Option Mathématiques.Mathématiques appliquées